目录

[一、 矩阵基本概念 3](#_Toc530249361)

[1.1 行列式 3](#_Toc530249362)

[1.2 矩阵类型 4](#_Toc530249363)

[1.3 矩阵行列式 4](#_Toc530249364)

[1.4 逆矩阵 5](#_Toc530249365)

[1.5 矩阵的秩 5](#_Toc530249366)

[1.6 矩阵的迹 6](#_Toc530249367)

[1.7 特征值和特征向量 6](#_Toc530249368)

[1.8 相似矩阵 7](#_Toc530249369)

[1.9 伴随矩阵 7](#_Toc530249370)

[二、欧式空间和酉空间 8](#_Toc530249371)

[2.1 共轭转置 8](#_Toc530249372)

[2.2 欧式空间与酉空间 9](#_Toc530249373)

[2.3 內积 9](#_Toc530249374)

[2.4 模(范数) 10](#_Toc530249375)

[2.5 正交 11](#_Toc530249376)

[2.6 酉(U)阵 12](#_Toc530249377)

[三、矩阵分解 14](#_Toc530249378)

[3.1 QR分解 14](#_Toc530249379)

[3.2 镜面阵 14](#_Toc530249380)

[3.3 秩一/满秩分解 17](#_Toc530249381)

[3.4 正规矩阵及Schur分解 19](#_Toc530249382)

[3.5 厄米特(Hermite)分解 22](#_Toc530249383)

[3.6特征值/酉阵Q的求解技巧 26](#_Toc530249384)

[3.7 奇异值分解 30](#_Toc530249385)

[3.8 谱分解 37](#_Toc530249386)

[四、广义逆矩阵 47](#_Toc530249387)

[4.1 广义逆矩阵的定义 47](#_Toc530249388)

[4.2 性质 48](#_Toc530249389)

[4.3 广义逆求解方式 49](#_Toc530249390)

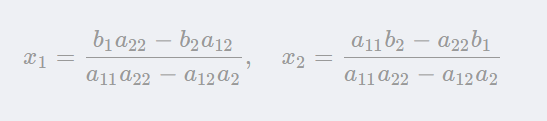
[4.4 广义逆矩阵与线性方程组 51](#_Toc530249391)

# 矩阵基本概念

## 1.1 行列式

#### 1.1.1 二阶行列式

对于上述线性方程组，当 时，该方程有唯一解：



为了方便记忆，引入记号：

称之为二阶行列式，它表示。

矩阵A的行列式记为det(A)。

#### 1.1.2 n阶行列式



其中指的是自然数1,2,…,n的一个排列， 为排列的逆序数。

逆序数：一个自然数排列中，前面数大于后面数的组合叫做一个逆序，逆序的总和叫做逆序数。

#### 1.1.3 行列式性质

1. 行列式与其转置行列式相等
2. 行列式的任意两行(列)互换位置，行列式变号
3. 若行列式中某一行(列)所有元素有公因子 k, 则可把公因子提到行列式记号之外. 即：



## 1.2 矩阵类型

实数矩阵、复数矩阵、方阵、行/列矩阵(行/列向量)

系数矩阵：方程组的系数组成的矩阵

单位矩阵：主对角线为1，其他全为0的方阵

对角矩阵：除主对角线以外全是0的矩阵，常写为

奇异矩阵：det(A) = 0

## 1.3 矩阵行列式

N阶矩阵A的行列式记作det(A)，行列式的相关定理：

1. 若A为一个n阶三角矩阵，则det(A)等于矩阵A对角元素的乘积
2. A为n阶矩阵，若A的某行或某列全为0，或者A有两行或两列相等，则det(A) = 0

## 1.4 逆矩阵

设A为n阶矩阵，在相同数域上存在n阶矩阵B，是得AB = E(单位矩阵)，则A、B互为逆矩阵，非奇异矩阵。

A的逆矩阵记作：

1. 矩阵A为可逆矩阵的充要条件为
2. 矩阵A可逆，则矩阵A的行/列向量线性无关，矩阵A满秩
3. 矩阵A可逆，则Ax=b有唯一解(两边同乘以，x=)
4. 逆矩阵具有唯一性
5. 伴随矩阵

## 1.5 矩阵的秩

矩阵中线性无关的纵列的最大个数叫做列秩，线性无关的行列的最大个数叫做行秩。

方阵的行秩和列秩相等，简称为矩阵的秩，记为rank(A)或r(A)或rk(A)。

对于矩阵A而言，其解空间为矩阵X，即AX=0。则r(A)=n-dimN(X)。

即A的秩等于A的行数(或列数，选较小的)-解空间的维度。

## 1.6 矩阵的迹

N阶矩阵主对角线元素的和叫做矩阵的迹，记作tr(A)。

1. 迹是n阶矩阵所有特征值的和

## 1.7 特征值和特征向量

设A是n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x使关系式Ax=λx成立，那么这样的数λ称为矩阵A特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量。

式Ax=λx也可写成( A-λE)X=0。这是n个未知数n个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式| A-λE|=0.

矩阵A的特征多项式：

Hamilton-Cayley定理：

矩阵A的特征多项式也是它的零化多项式，即对于矩阵A的特征多项式：

有：

1. **三角/对角矩阵对角元即为它的特征值**
2. **N阶矩阵的迹等于其特征值之和**
3. **相似矩阵特征值相同**
4. **(AB为方阵)**

## 1.8 相似矩阵

设A，B为n阶矩阵，如果有n阶可逆矩阵P存在，使得：，则称矩阵A和矩阵B相似，记作。

运算称为相似变换，P称为相似变换矩阵。

性质：

1. 若，则
2. 若，，则
3. 若，则A,B秩相同、行列式相同、迹相同，**特征值和特征多项式相同**
4. 若，则A、B具有相同的可逆性

若矩阵相似于某个对角矩阵，则该矩阵可对角化。

## 1.9 伴随矩阵

对于矩阵，将矩阵A的元素所在的第i行第j列元素划去后，剩余的各元素按原来的排列顺序组成的n-1阶矩阵所确定的**行列式**称为元素的**余子式**，记为。

称为元素的代数余子式。

由代数余子式构成的矩阵称为矩阵A的伴随矩阵。

常用性质：

1. A可逆当且仅当可逆
2. 若A可逆，则

# 二、欧式空间和酉空间

## 2.1 共轭转置

数的共轭转置：

实数x的共轭仍然是实数本身，复数的共轭。

数x的共轭转置

向量的共轭转置：

向量的共轭转置

矩阵的共轭转置：

矩阵，其中是列向量，矩阵A的共轭转置

共轭与转置的性质：

共轭转置的一些性质：



## 2.2 欧式空间与酉空间

欧式空间：有限维的实数內积空间

酉空间：有限维的复数內积空间

## 2.3 內积

在实数R(复数C)的有限维线性空间V内，若,有一种规则(X,Y)使之对应一个实数(复数)，则称该实数(复数)为X，Y的內积，该规则满足以下条件：

1. 对称性：
2. 可加性：
3. 齐次性：
4. 非负性：,当且仅当时，

称V为实(复)內积空间。

#### 2.3.1 內积运算

令

若,

若,

所以

#### 2.3.2 內积性质

上述四条：对称、可加、齐次、非负

## 2.4 模(范数)

定义：非负实数称为的长度(模或范数)，记为

定理：设V是欧氏空间，则：

复数向量的模：

复数的模：

复向量的模：

## 2.5 正交

定义：欧氏空间中，若向量满足，则称正交，记作。

定理：

推广，若两两正交，则

1. 设为V中非零向量的两两正交向量组，则必线性无关。
2. 对于n维欧氏空间的任一基，均可找到一组标准正交基。

标准正交基的求法：

设正交基为.

取，令，由于正交，所以

由可得，

令，由 可得：

因此，，其中：

此时得到了一组正交基，将其单位化即可得到标准正交基.

## 2.6 酉(U)阵

#### 2.6.1 U阵定义

1. 若，各列正交，，则为对角矩阵，称A为预备半U阵。
2. 若上述A中的都是单位长，则，称A为半U阵。
3. 若上述A为方阵，则称A为U阵。

#### 2.6.2 U阵性质

1. ，

# 三、矩阵分解

## 3.1 QR分解

#### 3.1.1 定理

设满秩矩阵，则存在正交矩阵及正线上三角阵，满足，且分解是唯一。

正交矩阵：，为U阵

正线上三角阵：主对角线上元为正

由 可得，

#### 3.1.2 Q、R的求法

记，由4.5节正交基的求法可以求得一组标准正交基

## 3.2 镜面阵

#### 3.2.1 定义

矩阵被称为镜面阵，可以把矩阵A理解为一个平面，向量X为这个平面的法向量。

#### 3.2.2 性质

因为

所以

因为，所以

1. A为U阵，各列正交+单位长+方阵

X是镜面A的法向量，所以即为X关于镜面A的投影-X。

1. 若，则

因为，所以Y在镜面A上，所以AY即为镜面A上的向量Y关于镜面的投影，仍是Y。

性质3和4都可以带入向量推导出来。

#### 3.2.3 扩展性质

对于，若，则有以下性质：

#### 3.2.4应用

利用镜面阵对矩阵A进行QR分解。

设矩阵,

记矩阵，即为矩阵去掉前i-1行和前i-1列之后的矩阵。

对于矩阵

取 其中

此时：

对也求出一个，此时

这样，所以

## 3.3 秩一/满秩分解

#### 3.3.1 秩一分解

设，秩r(A)=rank(A)=1，即各列成倍数关系

则

#### 3.3.2 秩一方阵公式

，秩r(A)=rank(A)=1

1. 秩一分解：
2. 。 的唯一非零特征根就是的迹(对角元素之和)，并且相应的特征向量为，即。
3. 对于，即，恰有n-1个无关解，是矩阵A的0根特征向量：.

证明：

#### 3.3.3 满秩分解

定理：任一矩阵可分解为一个列满秩和行满秩矩阵的乘积。

记号，表示r(A)=r，且

满秩分解定理可表示为：设，则存在，使。

#### 3.3.4 满秩分解的求法

对于矩阵, 对其进行初等行变换之后可以得到矩阵A的标准形, 只有前r行包含非零元，其他行全为0.

并且的前r行的若干列可以组成一个单位阵，即这些列只有一个非零元1，记这些列的列号为.

此时，的前r行构成的新矩阵即为，原矩阵中列构成的新矩阵就是。

例题：

对其进行初等变换之后

此时

## 3.4 正规矩阵及Schur分解

#### 3.4.1 Schur引理

已知任意矩阵都相似与一上三角矩阵，即存在矩阵P使得为上三角矩阵。

由此可得定理：对任意矩阵，存在U阵U，使得：

即任意复方阵A酉相似与一上三角阵，且**主对角元为A的特征值**。

证明：由QR分解可知，(Q,U都是酉阵)

记

因为K、R都是上三角阵，所以为上三角阵

#### 3.4.2 正规矩阵

设，若A满足，则称A(方阵)为正规矩阵(规范阵)。若正规，则也正规。

正规矩阵包括：

1. 厄米特阵： ，实对称矩阵：
2. 斜厄米特阵： ，实反对称矩阵：
3. 酉阵： 实正交阵：
4. 复对角矩阵：

**引理(平移法)：**

证明：令

Eg1 : 正规？

解：

为实反对称阵，正规，所以A正规

**引理(酉相似)：**

**引理(分块上三角)：若**

证明：迹公式：

为0阵

因为：

所以： ，C为0阵，和也为0阵

所以

因此，可以得到以下推论：

1. 若上三角矩阵A正规，则A为对角阵。
2. 若A为严格上三角(不是对角阵)，则A非正规。

证明：

记，由引理可知，，正规。

对进行递归，可得，所以A为对角阵。

#### 3.4.3 定理与推论

定理：设，则A是正规矩阵当且仅当A酉相似于一个对角阵，即：

对角阵：只有主对角线上元素非零

利用上节引理证明：

直接证明：

充分性：

由Schur引理可知，，K为上三角阵

因为，所以

记, 由可得，所以K为对角阵

必要性：

所以

推论1：A为正规阵，当且仅当A有n个特征向量构成的一组标准正交基，且A不同特征值得特征向量正交。

## 3.5 厄米特(Hermite)分解

#### 3.5.1 定理

1. 若，为厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

且都为实数。

证明：

由许尔(Schur)分解可知：

所以 ，为实数。

1. 若，则中各列都是A的特征向量，且线性无关。
2. 若，为厄米特阵()，则A恰有n个相互正交的特征向量。(有定理2可得)

#### 3.5.2 应用

1. 若，，则的值都为实数。

因为f为一个数，所以f为实数。

1. 若，任取，为A的特征值集合，则

(为对应的非零特征向量)

证明：

1. 由上述两点可得：**Hermite阵的特征值都为实数。**

#### 3.5.3 正定矩阵

定义：对任意，，则称A为半正定阵，记。对任意非零，，则称A为正定阵，记。

结合可得：

#### 3.5.4 Hermite阵的性质

1. 全为实数 (由5.5.2(1)可证)
2. 的值全为实数
3. 若，则存在使得，，叫做A的平方根，记，可以写为

证明：

取

1. 对于任意矩阵，是半正定的厄米特阵

#### 3.5.5 常见的Hermite阵

1. 实对称矩阵：
2. 任一方阵A，为Hermite阵

#### 3.5.6斜Hermite分解

若，为斜厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

为纯虚数。

证明：

为Hermite阵

所以：

## 3.6特征值/酉阵Q的求解技巧

#### 3.6.1平移法则(求特征根)

思路：

将一个复杂矩阵转换成秩一矩阵，再利用秩一矩阵 特征向量=，求复杂矩阵的特征值。

平移法则：

矩阵与矩阵具有相同的特征向量，并且：

，其中

即：

例题：

，求并给出一个特征向量。

解：

1. （秩一），

所以，特征向量

所以

#### 3.6.2特殊矩阵分解酉阵Q的求解方法

适用范围：正规矩阵的Schur分解、Hermite分解

（对角阵）

求法：

1. 求A的特征根
2. 求A的特征向量
3. 求A特征向量的标准正交基
4. 以这些标准正交基为列向量的矩阵即为

例题：

设，求正交阵，使得为对角阵。

(秩一)

利用正交化法则：

，其中：

，

，

#### 3.6.3换位公式(求特征根)

**换位公式：**

，则：

1. 与的特征根只差个0根

即：

所以与特征根只差若干个0根

**证明**：

构造矩阵

**例题**：

Eg1. ，求

解：

Eg2. ，求

解：

Eg3 用平移法求的，其中

解：

## 3.7 奇异值分解

#### 3.7.1 一些定理

对于矩阵

1. 是半正定的厄米特阵，且具有相同的非零特征值

, 所以为半正定阵。

记的解空间为，

则

所以和的解空间相等，所以

**高阵有左侧逆**

设为高阵，，则存在

证明：

，所以存在，使得

**低阵有左侧逆**

设为高阵，，则存在

用法：

1. 若, 为高阵，则

证：

1. 若, 为高阵，则

证：

#### 3.7.2 正奇异值

设，则恰有r个正根。

记A的正奇异值为：

A的全体奇异值为：

#### 3.7.3 简奇异值分解与奇异值分解

对于矩阵，r(A)=r，则存在半酉阵和半酉阵()，使得：

，其中

对于矩阵，r(A)=r，则存在酉阵和酉阵，使得，其中。

#### 3.7.4 简奇异值分解方法

解法一：

1. 求的特征根与特征向量(相互正交)
2. 令
3. 可得
4. 在简奇异值分解的基础之上将P和Q扩展为酉阵，其中，即可得奇异值分解

。

解法二：

(为对角阵)

所以如果已知某个矩阵的奇值分解，就可以求得矩阵的奇值分解。

Eg1 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg2 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg3 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

#### 3.7.5 推论

Eg1 : 对于方阵，奇异值的乘积等于特征根的乘积的绝对值

Eg2: 已知矩阵A的正奇异值分解为，可以得到矩阵的正奇异值分解。

解：

令

其中：,是一个酉阵

同样：

令

Eg3: 矩阵的极分解

对于任一方阵，有

，

因为为半正定矩阵，所以

其中为酉阵

叫做A的极分解

特别：(复数)

Eg4 :

证明：

解：

为Hermite阵，所以

记：

矩阵的第k行对角元：

所以

## 3.8 谱分解

#### 3.8.1 单纯阵

定义：

叫做单纯阵

注：各列都是矩阵A的特征向量且线性无关，即

定理：

1. 方阵为单纯阵有n个线性无关的特征向量。
2. 方阵为单纯阵的每个k重根恰有k个线性无关的特征向量。
3. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。
4. 若方阵的每个k重根恰有k个线性无关的特征向量，则为单纯阵。

判定：

1. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。
2. 对于方阵的任一k(k>1)重根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

1. 设方阵有k个互异的特征根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

#### 3.8.2 零化式

定义：

若存在方阵和多项式，

使得：.

称是的一个”0化式”，叫做的一个矩阵根。

注：若是的一个零化式，则对任意也是的一个零化式。

推理：

对于任一固定的方阵，可求出次数最低的零化式，记为。

Caylay定理：

方阵A的特征多项式：

Eg1 : ，求A得极小式

解：

特征多项式：

零化式(Caylay)：

因为：

所以极小式：

应用：若无重根且，则为单纯阵。

Eg2 : 已知，则为单。

解：

无重根且

所以为单纯阵

Eg3: 单纯阵判定：

解：

所以是单纯阵

#### 3.8.3 谱分解

单纯矩阵：

有以下特点：

叫做的谱分解

有以下特点：

1. 若为Hermit阵，则，否则不一定等于。

证明：

单阵谱分解公式：

若为单阵，全体不同根为,

则有：

其中： ，

叫谱阵。

证明：

，

对于重根，

所以

同样：

#### 3.8.4 谱分解的求法

谱分解：

由上节性质可知：

根据可得：

1. 对于任一多项式：，有

证明：

1. 有1可知，取

由上述已知推论，可取

特殊，若单阵只有两个不同特征根(**可以是0根**)

Eg1 : ，求

解： A为单阵

所以

所以

Eg2 : ，求

解：为单阵

所以

#### 3.8.5 谱分解的应用

**平方谱公式**：

若(半正定),且有谱公式：，则有平方根公式：

Eg1 : ，求

解：

**逆谱公式**：

若A为单阵，全体不同特征根为，

有谱公式：

引理：

**特征向量相关推论**：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t得特征向量。

原因：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t得特征向量。
2. 若，所以A的各列是的特向量，的各列是A的特向量。
3. 若，是关于的特向量，是关于的特向量。
4. 谱公式：中，的各列都是A的特向量。
5. 谱阵中，恰有n个无关的特向量。

证明：只要证

根据秩的相关定理：

**与的”遗传公式”：**

令，全体根则：

1. 对任一多项式的，全体根
2. 若有特征向量，则也有特向量

即

证明：

所以

因为

所以

记

# 四、广义逆矩阵

## 4.1 广义逆矩阵的定义

定义：设，若有，满足4个条件：

称为的一个加号逆，记。

常见的：

特别：

1. 可逆方阵有
2. 复数a可作为1阶阵：

的唯一性：

假设都适合条件：

## 4.2 性质

高阵公式：

设为高阵，，则：，且

低阵公式：

设为高阵，，则：，且

若可逆，则

若且可逆：

若，则，若，则

高低分解公式：

若为高低分解，则有，且，，

可以证满足正号逆的公式。

例题：

1. (高阵)

解：

1. (低阵)

解：

解：

## 4.3 广义逆求解方式

**第一公式(高低分解)：**

若为高低分解，则，其中，。

**第二公式(奇异值分解)：**

若为正SVD分解，其中，为半酉阵，则。

**秩一第二公式：**

若，且，则。

证明：令，则，

因为

所以

所以

**第三公式(QR分解)：**

若，则。

**谱公式：**

若为正规，且有谱公式：，则

## 4.4 广义逆矩阵与线性方程组

**定义：**

任一方程，可产生方程，叫为正规方程。

**引理：**

1. 正规方程一定有解(相容)，且有特解。

证明：

1. 有以下通解公式：

,其中，

1. 若有解，则必有特解。

证明：可设为的任一解：

将代入公式：

左边

所以是的解

**定义：**

任一矩阵可产生两个子空间：

1. 令，叫作的核空间(解空间)。
2. 令，叫作的值域或像空间(的列空间)。

**正交引理：**

1. 若，则(核空间)，即

证明：任取，有

1. 若，则(像空间)，即

证明：(定理1：)

**最小二乘解：**

若解，称不相容(矛盾方程)，，则最小值，，

此时的一个最小二乘解，其他最小二乘解也满足。

证明：

因为，所以，

所以

求解：,

通解，，为的基本解，即.

所以最小二乘解

例题：求得最小二乘解。

解：

设，，所以

所以所有最小二乘解：

**极小范数解：**

若有解，则必有特解，

通解：

是全体解中最小长度(范数)解，称为极小范数解。